Szkice rozwiązań

XIX OIJ, zawody drugiego stopnia
1 marca 2025

Olimpiada Informatyczna Juniorów

Piraci

Do rozwiązania zadania wystarczą dwie obserwacje:

- kolejność ruchów (na wejściu oraz na wyjściu) nie ma znaczenia, liczy się jedynie liczba ruchów każdego typu,
- ruchy pionowe i poziome są niezależne od siebie, możliwe jest osobne rozważenie sytuacji w każdym wymiarze.

Ponieważ ruch w lewo znosi się z ruchem w prawo (wykonanie obu tych ruchów jest równoważne z sytuacją, w której nie ruszamy się wcale), podobnie jak ruch w górę znosi się z ruchem w dół, wystarczy obliczyć jedynie finalny balans przemieszczenia:

- w poziomie jest to różnica między liczbą liter `P` oraz liczbą liter `L` na wejściu,
- w pionie jest to różnica między liczbą liter `G` oraz liczbą liter `D` na wejściu.

Na wyjście wystarczy wypisać takie znaki, żeby finalny balans przemieszczenia (uwzględniając zarówno znaki podane na wejściu jak i na wyjściu) wyniósł $[0, 0]$. Przykładowo: jeżeli balans poziomy jest dodatni i wynosi Δ_X, należy wypisać Δ_X kopii litery `L`, podobnie, gdyby balans był ujemny, należałoby wypisać $-\Delta_X$ kopii litery `P`. Analogicznie postępujemy dla wymiaru pionowego.

Domino Fibonacciego

Na zadanie minimalizacji szerokości planszy można patrzeć jak na zadanie minimalizacji niewykorzystanej przestrzeni planszy – chcąc, aby plansza była jak najwęższa, a jednocześnie pomieściła wszystkie klocki, tak naprawdę chcemy, żeby pole planszy, które nie jest pokryte klockami było jak najmniejsze możliwe.

Rozważmy różne przypadki, w zależności od parametru H. W poniższym rozważaniu zakładamy, że $N \geq 4$. Przypadki z $N \in \{1, 2, 3\}$ można łatwo rozważyć osobno.

Jeżeli $H = 1$, to klocki trzeba układać poziomo jeden za drugim, nie pozostawiając żadnych przerw. Użyjemy wtedy szerokości $W = F_0 + F_1 + \ldots + F_{N-1}$. Jest to oczywiście rozwiązanie optymalne, bo nie pozostawia żadnej niewykorzystanej przestrzeni.

Jeżeli $H = 2$, to możliwe jest rozważanie klocków w grupach po trzy klocki, w kolejności od najszerszego do najwęższego. Najszerszy klocek układamy poziomo w górnym rzędzie, zaś pod nim zmieszczą się idealnie dwa kolejne największe pozostałe klocki. Analogicznie układamy na górze czwarty największy klocek, zaś na dole pod nim mieszczą się piąty i szósty największy klocek, i tak do wyczerpania klocków. W ten sposób albo uda się pokryć całe pole planszy albo pozostanie dokładnie jedna jednostka pola, która nie jest pokryta klockami. Jeżeli jednak cokolwiek zostało, to zostało dlatego, że łączna powierzchnia klocków jest nieparzysta, a więc nie istnieje lepsze rozwiązanie niż to opisane powyżej.

Jeżeli $H = 3$, to możliwe jest osiągnięcie $W = F_{N-1}$. W pierwszym rzędzie układamy poziomo najszerszy klocek. W drugim rzędzie drugi i trzeci najszerszy klocek. Wszystkie pozostałe klocki zmieszczą się w trzecim rzędzie (co można wykazać przez indukcję matematyczną względem N lub sprawdzając hipotezę programem dla wszystkich $N \leq 26$).

Zauważmy, że szerokość planszy mniejszą niż F_{N-1} mamy szansę osiągnąć dopiero, gdy najdłuższy klocek będziemy mogli ułożyć pionowo, a więc dopiero wtedy, gdy $H \geq F_{N-1}$. Wtedy jednak mamy do czynienia z analogicznymi trzema przypadkami jak opisane powyżej tylko dla planszy obróconej w lewo o 90 stopni.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

Przekształcenie potęgowe

Warto myśleć o zadaniu w kontekście rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Każdy czynnik w liczbie potęgowej postaci a^b występuje liczbę razy, która jest wielokrotnością b. Istotnie, dla dowolnej podstawy potęgi a, jeżeli rozłożyć ją na (niekoniecznie parami różne) czynniki pierwsze $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, to otrzymamy, że $a^b = p_1^b \cdot p_2^b \cdot \ldots \cdot p_k^b$, a więc rzeczywiście krotność każdego czynnika pierwszego jest wielokrotnością b.

Możemy zgadnąć (przetestować wszystkie możliwości) wykładnik b docelowej liczby potęgowej: nie będzie on zbyt duży, bo liczba A może się składać z co najwyżej 39 czynników pierwszych ($2^{40} > 10^{12}$). Spośród optymalnych rozwiązań sprowadzających wejściowe A do liczby postaci a^b, dla ustalonego b, należy wybrać rozwiązanie najtańsze.

Ponieważ iloczyn liczb większych lub równych 2 jest większy od ich sumy, zawsze opłaca się domnażać lub wydzielać czynniki pierwsze z osobna (nie opłaca się więc na przykład pomnożyć przez 6, bo lepiej jest pomnożyć najpierw przez 2, a potem przez 3). Rozważania dla różnych czynników pierwszych możemy więc prowadzić niezależnie od siebie. Jeżeli liczba A zawiera pewną liczbę wystąpień czynnika pierwszego p, chcemy sprowadzić tę liczbę do wielokrotności b. Możemy bieżącą liczbę wystąpień czynnika zaokrąglić w górę (wykonując operacje mnożenia) lub w dół (wykonując operacje dzielenia). Jeżeli reszta z liczby wystąpień czynnika przez b jest równa co najmniej $\frac{b}{2}$, opłaca się mnożyć, a w przeciwnym przypadku dzielić (w tym dopuszczalne jest również pozbycie się wszystkich wystąpień każdego czynnika, ale należy uważać, żeby nie pozbyć się wszystkich czynników i nie ustawić przez to liczby docelowej na 1).

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie, którego czas działania zależy od czasu rozkładu na czynniki pierwsze liczby A. W tym zadaniu akceptowane były rozwiązania działające w czasie $\mathrm{O}(\sqrt{A})$, na przykład takie korzystające z faktu, że każda liczba złożona n ma czynnik pierwszy, który nie przekracza $\sqrt{n}$.

Skracanie słów

Zadanie stanie się łatwiejsze, jeżeli posortuje się napisy alfabetycznie. Wtedy napisy, które mają długie wspólne początki znajdą się obok siebie. Możliwe jest (choć wymagające pewnej precyzji w dowodzie) użycie standardowych funkcji sortujących znajdujących się w bibliotekach standardowych C++ lub Pythona – porównywanie napisów co prawda nie działa w czasie stałym, ale można udowodnić ograniczenie na łączną liczbę porównań pojedynczych liter we wszystkich porównaniach napisów podczas sortowania. Ponieważ trzeba wypisać odpowiedzi na pytania w kolejności zgodnej z podaną na wejściu, a nie w kolejności alfabetycznej, warto z każdym napisem związać jego pozycję na wejściu i sortować nie same napisy, ale pary napis i jego identyfikator w oryginalnej kolejności.

Dla każdego napisu wystarczy sprawdzić długość wspólnego fragmentu z jego poprzednikiem i następnikiem w tej kolejności. Można to zrobić wprost, porównując kolejne znaki aż do napotkania pierwszej różnicy. Pozycja tej różnicy determinuje moment, do którego należy skrócić napisy (należy zachować najkrótszy różniący je początkowy fragment).

Na końcu można posortować skrócone napisy według ich oryginalnych identyfikatorów, aby móc wypisać odpowiedzi w odpowiedniej kolejności.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".